




**Wybrane zasady, reguły i wzory  
matematyczne przydatne w  
przygotowaniu do egzaminu  
ósmoklasisty z matematyki**





## Spis Treści

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.  | Odczytywanie danych i procenty.....            | 2  |
| 2.  | Działania na liczbach.....                     | 2  |
| 3.  | Potęgi.....                                    | 6  |
| 4.  | Pierwiastki.....                               | 8  |
| 5.  | Wyrażenia algebraiczne i równania.....         | 9  |
| 6.  | Jednostki długości i czasu.....                | 10 |
| 7.  | Prędkość.....                                  | 11 |
| 8.  | Jednostki Powierzchni.....                     | 12 |
| 9.  | Pola powierzchni trójkątów i czworokątów.....  | 13 |
| 10. | Skala mapy.....                                | 14 |
| 11. | Punkty i odcinki w układzie współrzędnych..... | 15 |
| 12. | Kombinatoryka i prawdopodobieństwo.....        | 15 |
| 13. | Kąty.....                                      | 16 |
| 14. | Trójkąty.....                                  | 19 |
| 15. | Przystawanie i podobieństwo trójkątów.....     | 22 |
| 16. | Czworokąty.....                                | 24 |
| 17. | Jednostki objętości.....                       | 28 |
| 18. | Bryły.....                                     | 29 |
| 19. | Graniastosłupy.....                            | 29 |
| 20. | Ostrosłupy.....                                | 32 |

## 1. Odczytywanie danych i procenty

### 1.1. Zamiana procentów na ułamki zwykłe

$$x\% = \frac{x}{100}$$

### 1.2. Proporcje

Proporcją nazywamy relację w formie:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Z tego zapisu wynika, że pary liczb  $a$  i  $b$  oraz  $c$  i  $d$  są do siebie wprost proporcjonalne. Aby obliczyć brakującą liczbę w proporcji należy pomnożyć liczby znajdujące się „na krzyż wobec siebie” a następnie wynik tego mnożenia podzielić przez ostatnią liczbę, której jeszcze nie wykorzystaliśmy. Poniżej podano przykład obliczenia niewiadomej  $d$ .

$$d = \frac{bc}{a}$$

## 2. Działania na liczbach

### 2.1. Średnia arytmetyczna

Średnią arytmetyczną zbioru liczb określamy sumę liczb podzieloną przez ich ilość

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

### 2.2. Cechy podzielności liczb

| Podzielność przez | Cecha podzielności                                  | Przykład         |
|-------------------|---|------------------|
| 2                 | Ostatnia cyfra liczby to 0,2,4,6 lub 8              | 20 <u>6</u>      |
| 3                 | Suma cyfr podzielna przez 3                         | 1245: 1+2+4+5=12 |
| 4                 | Ostatnie dwie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4 | 46 <u>92</u>     |
| 5                 | Ostatnia cyfra liczby to 0 lub 5                    | 706 <u>5</u>     |
| 6                 | Liczba podzielna przez 2 i 3 jednocześnie           | 1008             |
| 8                 | Ostatnie trzy cyfry tworzą liczbę podzielną przez 8 | 60 <u>80</u>     |
| 9                 | Suma cyfr podzielna przez 9                         | 7956: 7+9+5+6=27 |
| 10                | Ostatnia cyfra to 0                                 | 947 <u>0</u>     |
| 25                | Ostatnie dwie cyfry to 00, 25, 50 lub 75            | 5029 <u>75</u>   |
| 50                | Ostatnie dwie cyfry to 00 lub 50                    | 20 <u>50</u>     |
| 100               | Ostatnie dwie cyfry to 00                           | 109 <u>00</u>    |

## 2.3. Zbiory liczb

### 2.3.1. Liczby naturalne

Liczby naturalne to liczby służące do zliczania obiektów niepodzielnych.

---

$$0, 1, 2, 3 \dots$$

---

### 2.3.2. Liczby całkowite

Liczby całkowite to liczby naturalne oraz liczby do nich przeciwne.

---

$$\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$$

---

### 2.3.3. Liczby wymierne

Liczby wymierne to liczby, które da zapisać się w formie ułamka, którego licznik i mianownik to liczby całkowite. Przykładami liczb wymiernych są liczby

---

$$\frac{1}{2}, 5, -3, -\frac{9}{2}, -\frac{83}{31}$$

---

### 2.3.4. Liczby niewymierne

Liczby niewymierne to liczby, których nie da zapisać się w formie ułamka, gdzie licznik i mianownik to liczby całkowite. Przykładami liczb niewymiernych są liczby

---

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{11}, \pi$$

---

### 2.3.5. Liczby rzeczywiste

---

*Do liczb rzeczywistych zaliczamy liczby naturalne, całkowite, wymierne i niewymierne.*

---

## 2.4. Liczby pierwsze

Liczby pierwsze to liczby naturalne podzielne tylko przez samą siebie oraz liczbę 1. Serię liczb pierwszych rozpoczyna liczba 2. Wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 100 to

---

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

---

## 2.5. Liczby złożone

Liczby złożone to wszystkie nie pierwsze liczby naturalne większe od 1. Innymi słowy, liczby złożone to liczby, które są iloczynem co najmniej dwóch liczb pierwszych. Przykładem liczb złożonych są liczby 6 oraz 50. Dzieje się tak ponieważ

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$$

## 2.6. NWD – Największy Wspólny Dzielnik

*Największym wspólnym dzielnikiem  $NWD(a, b)$  liczb  $a$  i  $b$  określamy największą liczbę naturalną, która dzieli  $a$  i  $b$  bez reszty.*

Aby wyznaczyć NWD, należy rozłożyć badaną parę liczb na czynniki oraz znaleźć tę część tego rozkładu, która się powtarza. Iloczyn wspólnych czynników pierwszych (w najmniejszych potęgach). Przykład wyznaczania  $NWD(1260, 1350)$

| Liczba | Dzielnik | Liczba | Dzielnik |
|--------|----------|--------|----------|
| 1260   | 2        | 1350   | 2        |
| 630    | 2        | 675    | 3        |
| 315    | 3        | 225    | 5        |
| 105    | 5        | 45     | 5        |
| 21     | 3        | 9      | 3        |
| 7      | 7        | 3      | 3        |
| 1      |          | 1      |          |

W rozkładzie powtarzają się liczby: 2, 3, 5 oraz jeszcze raz 3. Wynika z tego, że

$$NWD(1260, 1350) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 90$$

## 2.7. NWW – Najmniejsza Wspólna Wielokrotność

*Najmniejszą wspólną wielokrotnością  $NWW(a, b)$  liczb  $a$  i  $b$  określamy najmniejszą liczbę naturalną, której dzielnikiem jest zarówno  $a$  jak i  $b$ .*

Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb  $a$  i  $b$  będzie iloczyn liczb  $a$  i  $b$  podzielony przez ich NWD. W poprzednim podrozdziale ustaliliśmy, że  $NWD(1260, 1350) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$ . Zgodnie z procedurą wyznaczania NWW, wystarczy podzielić więc iloczyn liczb  $a$  i  $b$  przez wcześniej obliczone NWD. Przykład wyznaczenia  $NWW(1260, 1350)$

$$NWW(1260, 1350) = \frac{1260 \cdot 1350}{NWD(1260, 1350)} = \frac{1260 \cdot 1350}{90} = 18900$$

Ułatwieniem w obliczeniu NWW może być rozłożenie licznika i mianownika powyższego działania na czynniki. Ten rozkład jest nam znany, ponieważ był niezbędny do wyznaczenia NWD.

## 2.8. Kolejność wykonywania działań oraz znaczenie kreski ułamkowej

Wymieniając od działań najważniejszych hierarchia wykonywania działań matematycznych to

- I. Działania w nawiasach
- II. Pierwiastkowanie oraz potęgowanie
- III. Mnożenie oraz dzielenie
- IV. Dodawanie oraz odejmowanie

Uwaga! Kreska ułamkowa sprawia, że działania nad nią i pod nią są traktowane tak, gdyby znajdowały się w nawiasach. Kreska ułamkowa sama w sobie oznacza natomiast dzielenie liczb.

---

$$\frac{a + b \cdot c}{d : e - f} = \frac{(a + b \cdot c)}{(d : e - f)} = (a + b \cdot c) : (d : e - f)$$

---

## 2.9. Zasady zaokrąglania liczb

---

*Jeśli pierwsza odrzucona cyfra jest mniejsza niż 5, pozostawiamy ostatnią zachowaną cyfrę bez zmian. Natomiast jeśli pierwsza odrzucona liczba jest równa 5 lub więcej, zwiększamy ostatnią zachowaną cyfrę o 1. Wszystkie dalsze cyfry po miejscu zaokrąglenia usuwamy.*

---

**Przykład:**  $21,74281 \cong 21,7428 \cong 21,743 \cong 21,74 \cong 21,7 \cong 22 \cong 20$

## 3. Potęgi

### 3.1. Nazewnictwo potęg

$$\underbrace{a}_{\substack{\text{podstawa} \\ \text{potęgi}}} \overset{\text{wykładnik}}{\underbrace{\quad}_{\tilde{n}}} = \underbrace{b}_{\substack{\text{wynik} \\ \text{potęgowania}}}$$

### 3.2. Definicja potęgi

Potęgowanie liczby  $a$  do potęgi  $n$  oznacza, że liczbę  $a$  mnożymy przez samą siebie  $n$  razy

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

### 3.3. Działania na potęgach

#### 3.3.1. Mnożenie potęg o tych samych podstawach

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

#### 3.3.2. Dzielenie potęg o tych samych podstawach

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

#### 3.3.3. Potęgowanie potęgi

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

#### 3.3.4. Potęga iloczynu

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

#### 3.3.5. Potęga ujemna

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

### 3.3.6. Dla każdej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ oraz naturalnej dodatniej $n$ zachodzi

---

$$a^0 = 1$$

$$0^n = 0$$

---

Uwaga! Wyrażenie  $0^0$  jest tzw. Wyrażeniem nieoznaczonym co oznacza, że nie da się go jednoznacznie zinterpretować. Jeżeli na nie natrafisz, najprawdopodobniej popełniłeś błąd w obliczeniach.

### 3.3.7. Dla każdej liczby rzeczywistej $a$ zachodzi

---

$$1^n = 1$$

$$a^1 = a$$

---

## 4. Pierwiastki

### 4.1. Nazewnictwo

$$\overset{\substack{\text{stopień} \\ \text{pierwiastka}}}{\sqrt[n]{\underbrace{b}_{\substack{\text{liczba} \\ \text{pierwiastkowana}}}}} = \underbrace{a}_{\substack{\text{wynik} \\ \text{pierwiastkowania}}}$$

### 4.2. Definicja pierwiastka

Jeżeli dla dodatniego  $a$  i  $b$  oraz naturalnego  $n$ , zachodzi własność  $a^n = b$  to pierwiastkiem  $n$ -tego stopnia z liczby  $b$  określamy liczbę  $a$ , w następujący sposób:

$$\sqrt[n]{b} = a$$

Dodatkowo powyższa własność jest prawdziwa, gdy  $n$  jest nieparzyste oraz jednocześnie  $a$  i  $b$  są liczbami ujemnymi.

W szczególności warto pamiętać, że dla liczb dodatnich  $a$  zachodzi

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

### 4.3. Działania na pierwiastkach

#### 4.3.1. Mnożenie pierwiastków o tych samych stopniach.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

#### 4.3.2. Dzielenie pierwiastków o tych samych stopniach.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

### 4.4. Istnienie pierwiastków

Pierwiastki stopni parzystych np. 2, 4, 6 itd. z liczb ujemnych nie istnieją. Pierwiastki stopni nieparzystych istnieją natomiast dla wszystkich liczb rzeczywistych.

| Przypadek  | Przykład       | Czy ten pierwiastek istnieje (czy ma sens)? |
|--|----------------|---|
| Pierwiastek parzystego stopnia z liczby dodatniej    | $\sqrt{2}$     | Tak   |
| Pierwiastek parzystego stopnia z liczby ujemnej      | $\sqrt{-2}$    | Nie   |
| Pierwiastek nieparzystego stopnia z liczby dodatniej | $\sqrt[3]{2}$  | Tak   |
| Pierwiastek nieparzystego stopnia z liczby ujemnej   | $\sqrt[3]{-2}$ | Tak   |

## 5. Wyrażenia algebraiczne i równania

### 5.1. Działania na wyrażeniach algebraicznych

#### 5.1.1. Mnożenie wyrażeń przez liczbę

$$n(a + b) = na + nb$$

#### 5.1.2. Wyciąganie wspólnego czynnika przed nawias

$$na + nb = n(a + b)$$

#### 5.1.3. Potęgowanie jednomianu

$$(ax^k)^n = a^n x^{kn}$$

#### 5.1.4. Kwadrat sumy i różnicy

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

### 5.2. Typy równań ze względu na ilość rozwiązań

#### 5.2.1. Równanie sprzeczne

Równanie **sprzeczne** to równanie, które nie ma rozwiązań. Przykładem równania sprzecznego jest równanie

$$1 = 0$$

#### 5.2.2. Równanie oznaczone

Równanie **oznaczone** to równanie, które ma skończoną liczbę rozwiązań. Przykładem równania oznaczonego jest równanie

$$x = 6$$

#### 5.2.3. Równanie nieoznaczone

Równanie **nieoznaczone** to równanie, które ma nieskończoną ilość rozwiązań. Przykładem równania nieoznaczonego jest równanie

$$0 = 0$$

## 6. Jednostki długości i czasu

### 6.1. Jednostki długości

| Jednostka | Przelicznik |
|-----------|-------------|
| 1 km      | 1000 m      |
| 1 m       | 10 dm       |
| 1 dm      | 10 cm       |
| 1 cm      | 10 mm       |

### 6.2. Jednostki czasu

| Jednostka      | Przelicznik |
|----------------|-------------|
| Rok            | 365 dni     |
| Rok przestępny | 366 dni     |
| Doba           | 24 godziny  |
| Godzina        | 60 minut    |
| Minuta         | 60 sekund   |

### 6.3. Reguły zajścia roku przestępnego

**Reguła 1.** Rok musi być liczbą podzielną przez 4.

**Reguła 2.** Jeśli rok dzieli się przez 100, ale nie dzieli się przez 400 to nie jest przestępny.

### 6.4. Liczba dni w miesiącu

| Miesiąc    | I  | II        | III | IV | V  | VI | VII | VII | IX | X  | XI | XII |
|------------|----|-----------|-----|----|----|----|-----|-----|----|----|----|-----|
| Liczba dni | 31 | 28 lub 29 | 31  | 30 | 31 | 30 | 31  | 31  | 30 | 31 | 30 | 31  |

### 6.5. Przesunięcia miesięczne

Pierwszy dzień każdego miesiąca przypada w dniu tygodnia przesuniętym względem pierwszego dnia miesiąca poprzedniego o resztę z dzielenia przez 7 liczby dni w tym miesiącu.

| Miesiąc      | I | II      | III | IV | V | VI | VII | VII | IX | X | XI | XII |
|--------------|---|---------|-----|----|---|----|-----|-----|----|---|----|-----|
| Przesunięcie | 3 | 0 lub 1 | 3   | 2  | 3 | 2  | 3   | 3   | 2  | 3 | 2  | 3   |

**Przykład:** Jeśli 1.06 był w czwartek, to 1.08 będzie o (2 + 3) dni później, czyli we wtorek (czerwiec daje przesunięcie o 2 dni, a lipiec o 3).

### 6.6. Przesunięcie roczne

W ciągu roku nieprzestępnego, dzień tygodnia ulega przesunięciu o 1 do przodu.

**Przykład:** jeżeli 01.01.2025 wypadł w czwartek, to 01.01.2026 wypadnie w piątek.

W ciągu roku przestępnego, dzień tygodnia ulega przesunięciu o 2 do przodu.

**Przykład:** jeżeli 01.01.2028 będzie wypadł w sobotę, to 01.01.2029 będzie wypadł w poniedziałek.

## 7. Prędkość

### 7.1. Definicje

#### 7.1.1. Prędkość

Średnia prędkość to iloraz drogi  $s$  przebytej w czasie  $t$

$$v = \frac{s}{t}$$

#### 7.1.2. Droga

Droga jest iloczynem średniej prędkości  $v$  oraz czasu  $t$

$$s = v \cdot t$$

#### 7.1.3. Czas

Czas jest ilorazem przebytej drogi  $s$  oraz średniej prędkości  $v$

$$t = \frac{s}{v}$$

### 7.2. Jednostki prędkości

Przeliczanie najczęściej występujących jednostek prędkości odbywa się zgodnie ze schematem

| Jednostka             | Przelicznik                     |
|-----------------------|---------------------------------|
| 1 metr na sekundę     | 3,6 kilometra na godzinę        |
| 1 kilometr na godzinę | $\frac{5}{18}$ metra na sekundę |

Przeliczanie innych jednostek wymaga podstawienia nowej jednostki drogi i czasu do prędkości.

Poniżej przykład przeliczenia  $5 \frac{mm}{s}$  na jednostkę  $\frac{m}{min}$ .

$$5 \frac{mm}{s} = 5 \cdot \frac{0,001m}{\frac{1}{60}min} = 5 \cdot 0,001 \cdot 60 \frac{m}{min} = 0,3 \frac{m}{min}$$

## 8. Jednostki Powierzchni

### 8.1. Metoda przeliczania jednostek powierzchni

Przy przeliczaniu jednostek powierzchni stosujemy **Metodę kwadratu**.

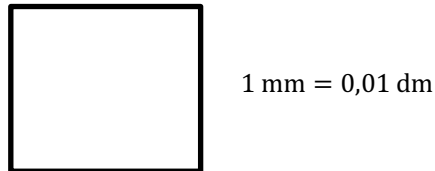
Poniżej przedstawiono jak zastosować metodę kwadratu do przeliczenia  $mm^2$  na  $dm^2$ .

*Krok 1. Budujemy kwadrat o boku 1 mm i notujemy jego pole powierzchni.*



$$P = (1 \text{ mm})^2 = 1 \text{ mm}^2$$

*Krok 2. Przeliczamy długość boku na jednostkę docelową i obliczamy powierzchnię kwadratu przy użyciu nowej jednostki.*



$$P = (0,01 \text{ dm})^2 = 0,0001 \text{ dm}^2$$

*Krok 3. Odnotowujemy, iż pola obydwu kwadratów są równe. W efekcie przeliczyliśmy jednostki.*

$$1 \text{ mm}^2 = 0,0001 \text{ dm}^2$$

### 8.2. Przeliczenia jednostek powierzchni

| Jednostka               | Przelicznik           |
|-------------------------|-----------------------|
| <b>1 m<sup>2</sup></b>  | 10000 cm <sup>2</sup> |
| <b>1 cm<sup>2</sup></b> | 100 mm <sup>2</sup>   |
| <b>1 ar</b>             | 100 m <sup>2</sup>    |
| <b>1 ha</b>             | 100 ar                |

## 9. Pola powierzchni trójkątów i czworokątów

### 9.1. Pole powierzchni dowolnego trójkąta

#### 9.1.1. Pole powierzchni trójkąta $P_{\Delta}$ o wysokości $h$ opuszczonej na bok $a$ wyrażamy wzorem

$$P_{\Delta} = \frac{ah}{2}$$

#### 9.1.2. Pole powierzchni trójkąta $P_{\Delta}$ o bokach długości $a$ , $b$ i $c$ wyrażamy wzorem

$$P_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Gdzie  $p$  to połowa obwodu trójkąta. Powyższy wzór to tzw. **Wzór Herona**

### 9.2. Pole powierzchni trójkąta równobocznego

#### 9.2.1. Wzór (1)

Pole powierzchni trójkąta równobocznego o boku  $a$ , wyrażamy wzorem

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

#### 9.2.2. Wzór (2)

Zachodzi również nieobowiązkowy wzór na pole trójkąta równobocznego wykorzystujący wysokość  $h$  trójkąta równobocznego

$$P_{\Delta} = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$$

### 9.3. Pole powierzchni trójkąta prostokątnego

Pole powierzchni  $P_{\Delta}$  trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych  $a$  i  $b$ , wyrażamy wzorem

$$P_{\Delta} = \frac{ab}{2}$$

### 9.4. Pole powierzchni kwadratu

Pole powierzchni kwadratu  $P_{\square}$  o boku  $a$ , wyrażamy wzorem

$$P_{\square} = a^2$$

### 9.5. Pole powierzchni prostokąta

Pole powierzchni prostokąta  $P_{\square}$  o bokach  $a$  i  $b$ , wyrażamy wzorem

$$P_{\square} = ab$$

## 9.6. Pole powierzchni równoległoboku

Pole powierzchni równoległoboku  $P_{\square}$  o wysokości  $h$  opuszczonej na bok  $a$ , wyrażamy wzorem

$$P_{\square} = ah$$

## 9.7. Pole powierzchni rombu

### 9.7.1. Wzór (1)

Pole powierzchni rombu  $P_{\diamond}$  o przekątnych  $e$  i  $f$ , wyrażamy wzorem

$$P_{\diamond} = \frac{ef}{2}$$

### 9.7.2. Wzór (2)

Romb jest równoległobokiem, więc obowiązuje również wzór

$$P_{\diamond} = ah$$

## 9.8. Pole powierzchni trapezu

Pole powierzchni trapezu o podstawach  $a$  i  $b$  oraz wysokości  $h$ , wyrażamy wzorem

$$P = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

## 10. Skala mapy

### 10.1. Skala pomniejszająca obiekt

*Aby wyrazić pomniejszenie obiektu stosujemy skalę*

$$1 : x$$

Gdzie  $x$  opisuje krotność zmniejszenia obiektu względem jego rzeczywistego rozmiaru. Przykład: Model samolotu wykonano w skali 1:15. Wskazuje to, iż model samolotu jest 15-krotnie mniejszy niż prawdziwy samolot.

### 10.2. Skala powiększająca obiekt

*Aby wyrazić powiększenie obiektu stosujemy skalę:*

$$x : 1$$

Gdzie  $x$  opisuje krotność powiększenia rzeczywistego obiektu. Przykład: Model mrówki w skali 100:1 wskazuje, iż model mrówki jest 100-krotnie większy niż prawdziwa mrówka.

## 11. Punkty i odcinki w układzie współrzędnych

### 11.1. Długość odcinka w układzie współrzędnych

Jeżeli dane są punkty  $A = (x_A, y_A)$  oraz  $B = (x_B, y_B)$  to odległość  $|AB|$  tych punktów w układzie współrzędnych wyraża wzór

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

### 11.2. Środek odcinka w układzie współrzędnych

Jeżeli dane są punkty  $A = (x_A, y_A)$  oraz  $B = (x_B, y_B)$  to środek  $S_{AB}$  odcinka  $AB$  ma współrzędne

$$S_{AB} = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

## 12. Kombinatoryka i prawdopodobieństwo

### 12.1. Reguła mnożenia

Jeżeli doświadczenie losowe składa się z pewnej liczby etapów, przy czym pierwszy etap doświadczenia może zajść na  $n_1$ , drugi etap  $n_2$ , a  $k$ -ty etap na  $n_k$  sposobów, to istnieje

$$|A| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

różnych wyników tego doświadczenia.

### 12.2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Jeżeli zdarzenie  $A$  może zajść na  $|A|$  sposobów, a wszystkich potencjalnych wyników doświadczenia losowego jest  $|\Omega|$ , to prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  wynosi

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

## 13. Kąty








### 13.1. Litery greckie jako oznaczenia kątów

Kąty oznaczamy małymi literami greckimi. Poniżej przedstawiono wybrane litery greckie wraz z polskim nazewnictwem.

| Symbol        | Nazwa   |
|---------------|---------|
| $\alpha$      | alfa    |
| $\beta$       | beta    |
| $\gamma$      | gamma   |
| $\delta$      | delta   |
| $\sigma$      | sigma   |
| $\varepsilon$ | epsilon |
| $\omega$      | omega   |
| $\kappa$      | kappa   |

Zdecydowana większość zadań wymaga od nas znajomości nazewnictwa pierwszych pięciu liter greckich z powyższej tabeli.

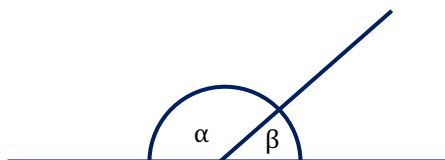
### 13.2. Klasyfikacja kątów ze względu na ich miary

| Miara kąta           | Nazwa kąta   | Przykład  |
|----------------------|--------------|---|
| Od 0 do 90 stopni    | Kąt ostry    |    |
| 90 stopni            | Kąt prosty   |   |
| Od 90 do 180 stopni  | Kąt rozwarty |  |
| 180 stopni           | Kąt półpełny |   |
| Od 0 do 180 stopni   | Kąt wypukły  |  |
| Od 180 do 360 stopni | Kąt wklęsły  |  |
| 360 stopni           | Kąt pełny    |  |

### 13.3. Kąty przyległe

Kątami przyległymi nazywamy kąty powstałe w wyniku podziału kąta półpełnego ( $180^\circ$ ) na dwie, niekoniecznie równe sobie części.

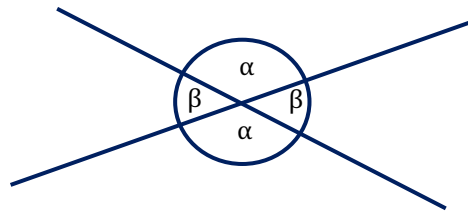
Suma miar kątów przyległych zawsze wynosi  $180^\circ$ .



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

### 13.4. Kąty wierzchołkowe

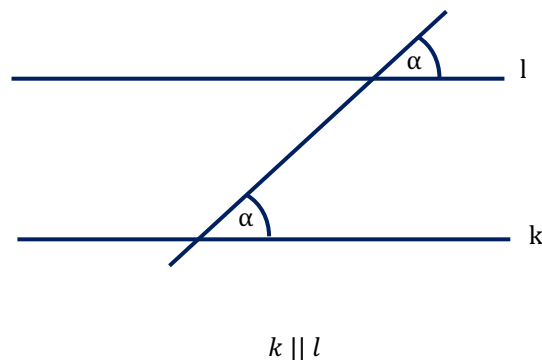
Kątami wierzchołkowymi nazywamy parę kątów powstałych w wyniku przecięcia dwóch prostych. Kąty wierzchołkowe nie mają wspólnych ramion. Wspólny jest jedynie wierzchołek tych kątów. Miary kątów wierzchołkowych są identyczne.



Kątami wierzchołkowymi na powyższym rysunku są pary kątów  $\alpha, \alpha$  oraz  $\beta, \beta$ .

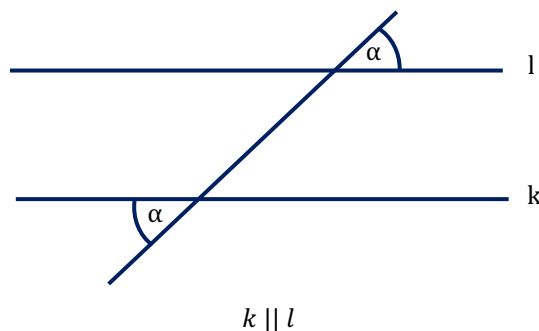
### 13.5. Kąty odpowiadające

Kątami odpowiadającymi nazywamy kąty powstałe w wyniku przecięcia dwóch prostych równoległych trzecią prostą – nierównoległą do dwóch pierwszych. Kąty odpowiadające powstają po tej samej stronie linii przecinanych i przecinającej. Miary kątów odpowiadających są identyczne.



### 13.6. Kąty naprzemianległe

Kątami odpowiadającymi nazywamy kąty powstałe w wyniku przecięcia dwóch prostych równoległych trzecią prostą – nierównoległą do dwóch pierwszych. Kąty odpowiadające powstają po przeciwnych stronach linii przecinanych i przecinającej. Miary kątów odpowiadających są identyczne.



### 13.7. Kąty w trójkątach

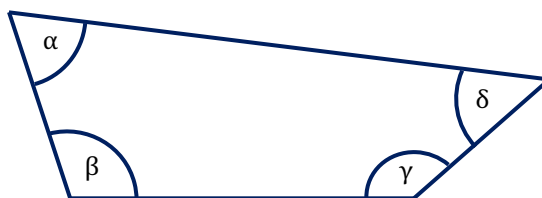
Suma miar kątów w trójkącie wynosi  $180^\circ$ .



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

### 13.8. Kąty w czworokątach

Suma miar kątów w czworokątach wynosi  $360^\circ$ .



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

### 13.9. Kąty w wielokątach

#### 13.9.1. Wzór na sumę miar kątów wewnętrznych w wielokącie

Suma miar kątów wewnętrznych  $s_n$  zależy od ilości wierzchołków tego wielokąta w następujący sposób

$$s_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

**przykład:** suma miar kątów w dowolnym 10-kącie wynosi

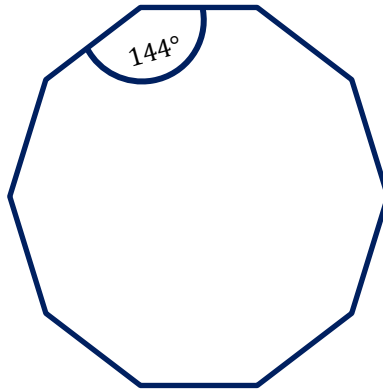
$$s_{10} = (10 - 2) \cdot 180^\circ = 8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$$

#### 13.9.2. Wzór na miarę kąta wewnętrznego w wielokącie foremnym

W wielokącie foremnym miara kąta wewnętrznego  $k_n$  zależy od ilości wierzchołków tego wielokąta w następujący sposób

$$k_n = \frac{n - 2}{n} \cdot 180^\circ$$

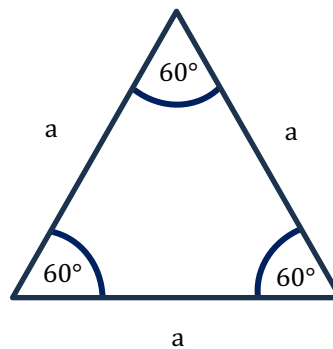
**przykład:** miara kąta w 10-kącie foremnym wynosi:



$$k_{10} = \frac{10 - 2}{10} \cdot 180^\circ = \frac{8}{10} \cdot 180^\circ = 144^\circ$$

## 14. Trójkąty

### 14.1. Trójkąt równoboczny



#### 14.1.1. Wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

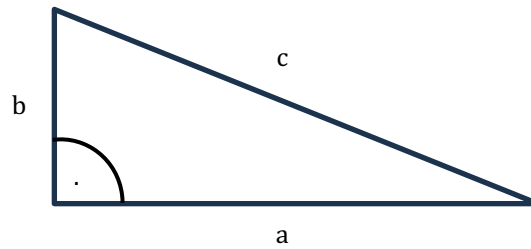
#### 14.1.2. Pole trójkąta równobocznego – wzór obowiązkowy

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

#### 14.1.3. Pole trójkąta równobocznego – wzór dodatkowy

$$P = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$$

## 14.2. Trójkąt prostokątny



### 14.2.1. Twierdzenie pitagorasa

W każdym trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości **a** i **b** oraz przeciwprostokątnej **c** zachodzi tw. Pitagorasa

$$a^2 + b^2 = c^2$$

### 14.2.2. Trójki pitagorejskie

Zestawy trzech liczb, które spełniają twierdzenie Pitagorasa nazywamy trójkami pitagorejskimi.

Najczęściej wykorzystywane w zadaniach trójki pitagorejskie wymieniono w tabeli.

|            | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |                 | $a^2 + b^2 = c^2$   |
|------------|----------|----------|----------|-----------------|---------------------|
| <b>I</b>   | 3        | 4        | 5        | <b>Ponieważ</b> | $3^2 + 4^2 = 5^2$   |
| <b>II</b>  | 5        | 12       | 13       |                 | $5^2 + 12^2 = 13^2$ |
| <b>III</b> | 8        | 15       | 17       |                 | $8^2 + 15^2 = 17^2$ |
| <b>IV</b>  | 7        | 24       | 25       |                 | $7^2 + 24^2 = 25^2$ |

**Ciekawostka:** wielokrotności trójek pitagorejskich również są trójkami pitagorejskimi. Np.: dwukrotność trójki 3, 4, 5 czyli 6, 8, 10 również jest trójką pitagorejską.

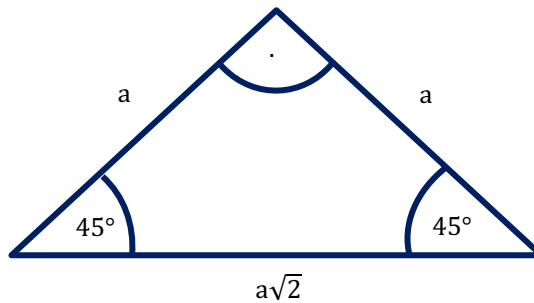
### 14.2.3. Pole trójkąta prostokątnego

Ze względu na prostopadłość przyprostokątnych **a** i **b**, można potraktować jedną z nich jako wysokość, a drugą jako podstawę trójkąta prostokątnego. Dzięki temu pole trójkąta prostokątnego można wyznaczyć ze wzoru

$$P = \frac{ab}{2}$$

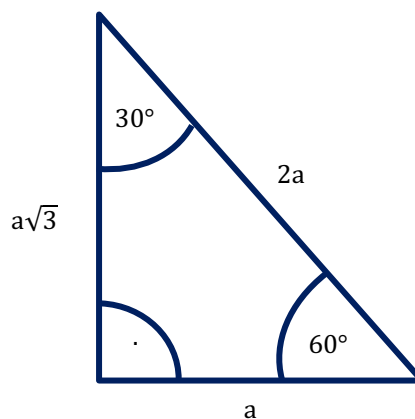
### 14.3. Trójkąt o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$

W trójkącie prostokątnym równoramiennym zachodzą następujące własności



### 14.4. Trójkąt o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

W trójkącie prostokątnym będącym połową trójkąta równobocznego zachodzą następujące własności



### 14.5. Istnienie trójkąta

#### 14.5.1. Warunek związany z długością boków

Aby trójkąt o bokach  $a \leq b \leq c$  istniał musi zachodzić własność

$$a + b > c$$

#### 14.5.2. Warunek związany z kątami wewnętrznymi

Aby można było skonstruować trójkąt o kątach wewnętrznych  $\alpha$ ,  $\beta$  oraz  $\gamma$  musi zachodzić

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

#### 14.6. Test na rodzaj trójkąta

Aby sprawdzić z jakiego rodzaju trójkątem mamy do czynienia wystarczy porównać sumę kwadratów dwóch najkrótszych boków trójkąta z kwadratem boku najdłuższego.

Dla trójkąta o bokach  $a \leq b \leq c$  obowiązują następujące reguły

---

*Jest ostrokątny, gdy  $c^2 < a^2 + b^2$*

*Jest prostokątny, gdy  $c^2 = a^2 + b^2$*

*Jest rozwartokątny, gdy  $c^2 > a^2 + b^2$*

---

### 15. Przystawanie i podobieństwo trójkątów

#### 15.1. Trójkąty przystające

---

*Trójkątami przystającymi nazywamy parę trójkątów o identycznym kształcie i rozmiarze.*

---

##### 15.1.1. Cecha przystawania bok, bok, bok (bbb)

---

*Cecha (bbb) zachodzi, gdy trzy boki jednego trójkąta są równe trzem bokom drugiego.*

---

##### 15.1.2. Cecha przystawania bok, kąt, bok (bkb)

---

*Cecha (bkb) zachodzi, gdy dwa boki i kąt między nimi są równe odpowiednim elementom drugiego trójkąta.*

---

##### 15.1.3. Cecha przystawania kąt, bok, kąt (kbk)

---

*Cecha (kbk) zachodzi, gdy dwa kąty i bok między nimi (lub odpowiadający bok) są równe odpowiednim elementom drugiego trójkąta.*

---

#### 15.2. Trójkąty podobne

---

*Trójkątami podobnymi określamy parę trójkątów o identycznym kształcie. Trójkąty podobne mogą różnić się rozmiarem.*

---

##### 15.2.1. Cecha podobieństwa bok, bok, bok (bbb)

---

*Cecha (bbb) zachodzi, gdy stosunki długości odpowiadających sobie boków są równe.*

---

### 15.2.2. Cecha podobieństwa bok, kąt, bok (bkb)

Cecha (bkb) zachodzi, gdy stosunki dwóch boków są równe i kąt między nimi jest równy odpowiedniemu kątowi drugiego trójkąta.

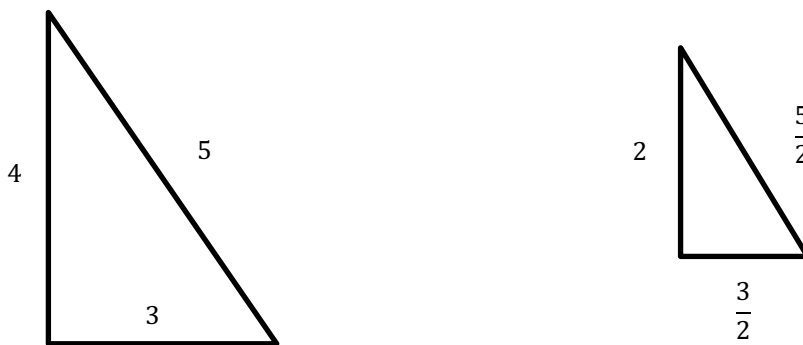
### 15.2.3. Cecha podobieństwa kąt, kąt (kk)

Cecha (kk) zachodzi, gdy dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego.

## 15.3. Skala podobieństwa

Skala podobieństwa  $k$  określa stosunek (iloraz) odpowiadających długości w dwóch figurach podobnych. Aby obliczyć skalę podobieństwa można użyć każdego odcinka, z zastrzeżeniem, aby odcinki wybranych figur były geometrycznie w tym samym miejscu. Najczęściej skalę podobieństwa obliczamy przy użyciu dwóch odpowiadających boków, wysokości lub obwodów.

### 15.3.1. Przykład wyznaczenia skali podobieństwa dwóch trójkątów



Dysponując wszystkimi bokami skalę podobieństwa liczymy jako stosunek dwóch najmniejszych, dwóch średnich lub dwóch najdłuższych boków. Wszystkie te stosunki dają ten sam rezultat.

$$k = \frac{4}{2} = \frac{5}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$$

Zatem skala podobieństwa trójkątów przedstawionych na rysunku wynosi 2.

## 16. Czworokąty

### 16.1. Kwadrat

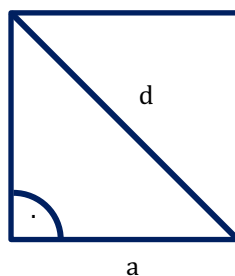
#### 16.1.1. Pole kwadratu

Pole kwadratu o boku  $a$ , wyrażamy wzorem

$$P = a^2$$

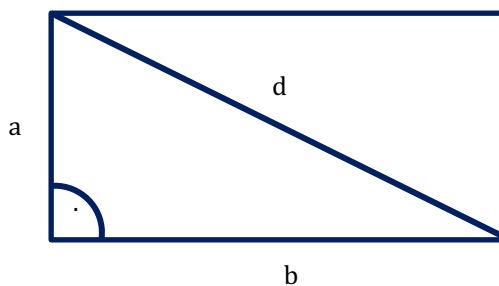
#### 16.1.2. Długość przekątnej kwadratu

Długość przekątnej  $d$  kwadratu o boku  $a$ , wyrażamy wzorem



$$d = a\sqrt{2}$$

### 16.2. Prostokąt



#### 16.2.1. Pole prostokąta

Pole prostokąta o boku  $a$  i  $b$ , wyrażamy wzorem

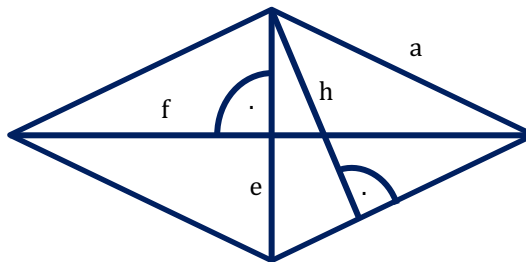
$$P = ab$$

#### 16.2.2. Długość przekątnej prostokąta

Długość przekątnej  $d$  prostokąta o bokach  $a$  i  $b$ , wyrażamy wzorem

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

### 16.3. Romb



#### 16.3.1. Pole rombu

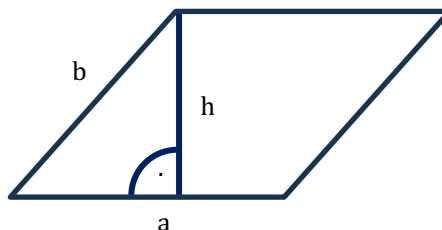
Pole rombu o podstawie  $a$ , wysokości  $h$  i długości przekątnych  $e$  i  $f$  wyrażamy wzorem

$$P = ah = \frac{ef}{2}$$

#### 16.3.2. Własności rombu

Wszystkie boki rombu są równej długości. Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym. Punkt przecięcia przekątnych rombu dzieli je na połowy.

### 16.4. Równoległobok



#### 16.4.1. Pole równoległoboku

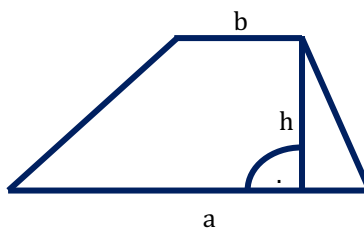
Pole równoległoboku o podstawie  $a$  oraz wysokości  $h$  wyrażamy wzorem

$$P = ah$$

#### 16.4.2. Własności równoległoboku

Przeciwległe boki równoległoboku są równej długości. Punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli je na połowy. W każdym równoległoboku pary kątów leżących naprzeciwko siebie są sobie równe, a miary sąsiednich kątów sumują się do  $180^\circ$ .

## 16.5. Trapez



### 16.5.1. Pole trapezu

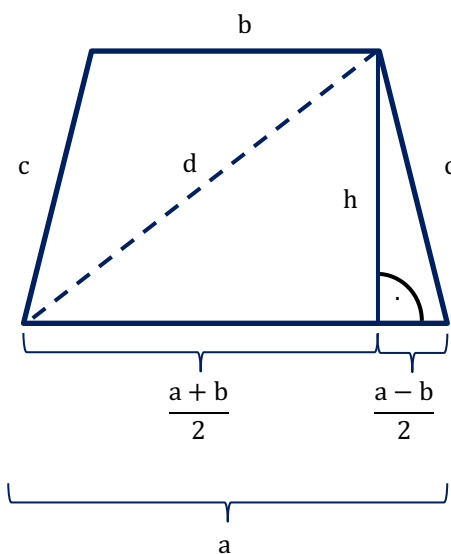
Pole trapezu o podstawach  $a$  i  $b$  oraz wysokości  $h$  wyrażamy wzorem

$$P = \frac{a + b}{2} h$$

### 16.5.2. Własności trapezu

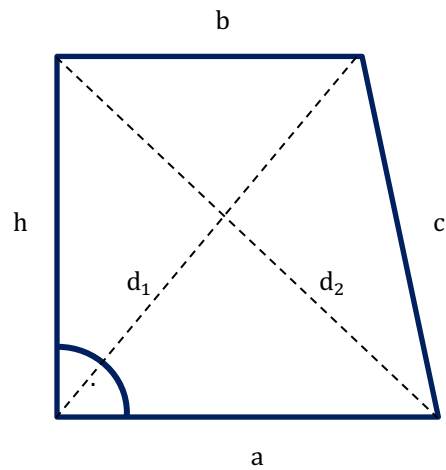
*W trapezie istnieje przynajmniej jedna para boków równoległych. Suma miar kątów leżących przy jednym z ramion trapezu wynosi  $180^\circ$ .*

## 16.6. Trapez równoramienny



*W trapezie równoramiennym ramiona  $c$  oraz przekątne  $d$  są równej długości. Wysokość opuszczona na podstawę  $a$  z jednego z wierzchołków podstawy  $b$  dzieli podstawę na odcinki długości  $\frac{a-b}{2}$  oraz  $\frac{a+b}{2}$ .*

## 16.7. Trapez prostokątny



---

*W trapezie prostokątnym jedno ramię, prostopadłe do podstaw trapezu pełni rolę wysokości.*

---

### 16.7.1. Krótsza przekątna trapezu prostokątnego

Krótsza przekątna  $d_1$  trapezu prostokątnego ma długość

$$d_1 = \sqrt{b^2 + h^2}$$

---

### 16.7.2. Dłuższa przekątna trapezu prostokątnego

Dłuższa przekątna  $d_2$  trapezu prostokątnego ma długość

$$d_2 = \sqrt{a^2 + h^2}$$

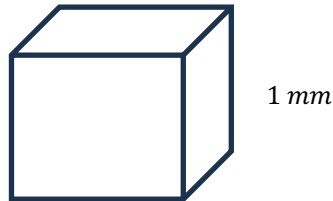
---

## 17. Jednostki objętości

### 17.1. Przeliczanie jednostek objętości

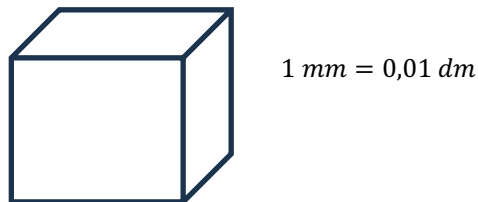
Przy przeliczaniu jednostek powierzchni użyteczna jest tzw. **metoda sześcianu**. Poniżej przedstawiono przykład zastosowania metody sześcianu do przeliczenia  $mm^3$  na  $dm^3$ .

*Krok 1. Budujemy sześcián o boku 1 mm i obliczamy jego objętość*



$$V = (1 \text{ mm})^3 = 1 \text{ mm}^3$$

*Krok 2. Przeliczamy długość krawędzi na dm i przy pomocy nowej jednostki ponownie obliczamy objętość*



$$P = (0,01 \text{ dm})^3 = 0,000001 \text{ dm}^3$$

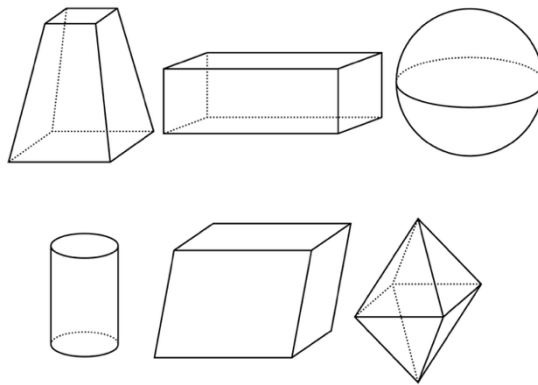
*Krok 3. Odnotowujemy, iż nadal jest to ten sam sześcián, którego użyliśmy w kroku 1. Obliczone objętości są zatem sobie równe.*

$$1 \text{ mm}^3 = 0,000001 \text{ dm}^3$$

### 17.2. Przeliczniki jednostek objętości

| Jednostka                      | Przelicznik         |
|--------------------------------|---------------------|
| $1 \text{ m}^3$                | $1000 \text{ dm}^3$ |
| $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ | $1000 \text{ cm}^3$ |
| $1 \text{ cm}^3$               | $1000 \text{ mm}^3$ |

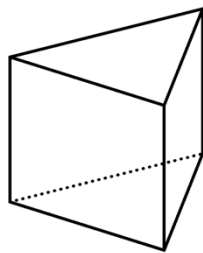
## 18. Bryły



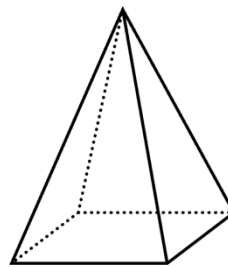
*Bryła to trójwymiarowa, ograniczona powierzchniami figura geometryczna, posiadająca objętość.*

### 18.1. Bryła prawidłowa

Graniasłup o podstawie trójkąta równobocznego.

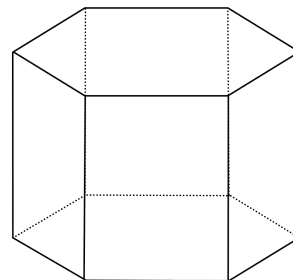
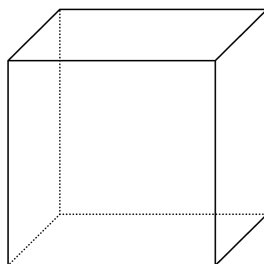
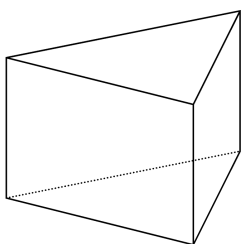


Ostrosłup o podstawie kwadratu



*Bryła prawidłowa, to bryła zawierająca w podstawie figurę foremną – czyli taką, której kąty wewnętrzne są tej samej miary, a wszystkie boki są tej samej długości.*

## 19. Graniastosłupy



*Graniastosłup to wielościan, który zawiera parę przystających oraz równoległych ścian zwanych podstawami. Podstawy graniastosłupa połączone są odcinkami zwanymi krawędziami bocznymi.*

## 19.1. Graniastosłup

### 19.1.1. Objętość graniastosłupa

Objętość graniastosłupa o polu podstawy  $P_p$  i wysokości  $H$  wyrażamy wzorem

$$V = P_p H$$

### 19.1.2. Pole boczne graniastosłupa

Pole boczne graniastosłupa o obwodzie podstawy  $L$  oraz wysokości  $H$  wyrażamy wzorem

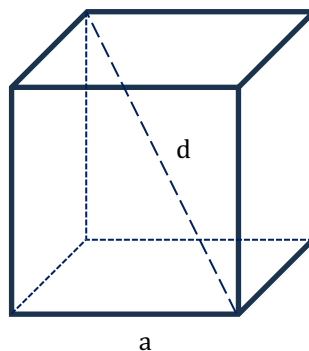
$$P_B = LH$$

### 19.1.3. Pole całkowite graniastosłupa

Pole całkowite  $P_C$  graniastosłupa o polu podstawy  $P_p$  i polu bocznym  $P_B$  wyrażamy wzorem

$$P_C = 2P_p + P_B$$

## 19.2. Sześcian



### 19.2.1. Objętość sześcianu

Objętość  $V$  o długości krawędzi  $a$  wyrażamy wzorem

$$V = a^3$$

### 19.2.2. Pole całkowite

Pole całkowite  $P_C$  sześcianu o długości krawędzi  $a$  wyrażamy wzorem

$$P_C = 6a^2$$

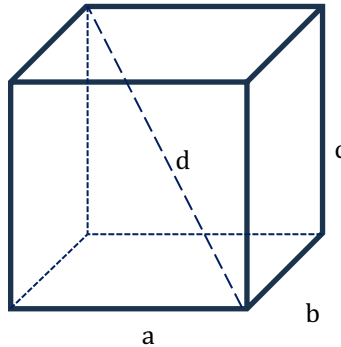
### 19.2.3. Długość przekątnej

Długość przekątnej  $d$  sześcianu, o długości krawędzi  $a$  wyrażamy wzorem

$$d = a\sqrt{3}$$

Sześcian jest graniastostupem prawidłowym prostym, dlatego wszystkie powyższe wzory wynikają z tego właśnie faktu.

### 19.3. Prostopadłościan



#### 19.3.1. Objętość prostopadłościanu

Objętość  $V$  prostopadłościanu o krawędziach wychodzących z jednego punktu długości  $a$ ,  $b$  oraz  $c$  wyrażamy wzorem

$$V = abc$$

#### 19.3.2. Pole całkowite prostopadłościanu

Pole całkowite prostopadłościanu  $P_c$  wyrażamy wzorem

$$P_c = 2(ab + bc + ca)$$

#### 19.3.3. Długość przekątnej prostopadłościanu

Długość przekątnej prostopadłościanu  $d$  wyrażamy wzorem

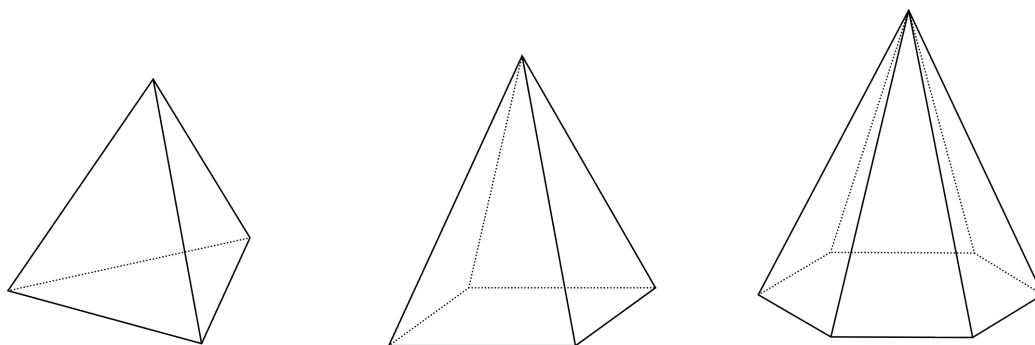
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

### 19.4. Ilość wierzchołków, krawędzi i ścian w graniastostupie

Jeżeli  $n$  to liczba wierzchołków w podstawie graniastostupa to liczbę jego wierzchołków, krawędzi i ścian można opisać przy pomocy poniższych wyrażeń

| Obiekt      | liczność |
|-------------|----------|
| Wierzchołki | $2n$     |
| Krawędzie   | $3n$     |
| Ściany      | $n + 2$  |

## 20. Ostrosłupy



Ostrosłup to wielościan, który składa się z jednej podstawy będącej dowolnym wielokątem, oraz ścian bocznych w kształcie trójkątów, przy czym wszystkie ściany boczne mają wspólny wierzchołek, nazywany wierzchołkiem ostrosłupa. Wysokością ostrosłupa określamy najkrótszy odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z wielokątem znajdującym się w jego podstawie.

### 20.1. Obliczenia w ostrosłupie

#### 20.1.1. Objętość ostrosłupa

Objętość ostrosłupa o polu podstawy  $P_p$  i wysokości  $H$  wyrażamy wzorem

$$V = \frac{1}{3} P_p H$$

#### 20.1.2. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa o polach ścian bocznych  $P_{s1}, P_{s2} \dots P_{sn}$  itd. wyrażamy wzorem

$$P_B = P_{s1} + P_{s2} + \dots + P_{sn}$$

#### 20.1.3. Pole całkowite ostrosłupa

Pole całkowite ostrosłupa o polu podstawy  $P_p$  i polu bocznym  $P_B$  wyrażamy wzorem

$$P_C = P_p + P_B$$

### 20.2. Ilość wierzchołków, krawędzi i ścian w ostrosłupie

Jeżeli  $n$  to liczba wierzchołków w podstawie ostrosłupa to liczbę jego wierzchołków, krawędzi i ścian można opisać przy pomocy poniższych wyrażeń

| Obiekt      | liczność |
|-------------|----------|
| Wierzchołki | $n + 1$  |
| Krawędzie   | $2n$     |
| Ściany      | $n + 1$  |